大学数学のアトリエ｜集合論　第 4 章　順序集合

No.2　ツォルンの補題

この回のゴール

- 鎖・帰納的順序集合の定義を述べ，ツォルンの補題の主張を正確に言える．
- ツォルンの補題を使って，どんなベクトル空間にも基底があることを証明できる．
- ツォルンの補題を使う証明の「型」を理解し，ほかの場面に当てはめられる．
- 有限の場合にはツォルンの補題がいらないことを説明できる．

■ 1. 極大元はいつ存在するか

数学では，「これ以上大きくできないもの」（極大なもの）を見つけたい場面がよくある．たとえば，1 次独立なベクトルの集合を「これ以上ベクトルを付け加えると 1 次独立でなくなる」ところまで大きくすれば，それは基底になる（分野「線形代数」第 4 章 No.3）．

空でない有限の順序集合なら，極大元はいつでも存在する．要素を 1 つとり，それより大きい要素があれば乗りかえる，ということをくり返せば，有限回で止まるからである（練習問題 3）．しかし無限の順序集合では，極大元があるとは限らない．

- $(\mathbb{N}, \leq)$ や $(\mathbb{R}, \leq)$ には極大元がない．どこまでも上に行ける．
- $([0,1), \leq)$ にも極大元がない．$\mathbb{R}$ で考えたときの上限 1 が $[0,1)$ の外にあり，1 に向かう列が「行き先を失う」．

どちらも，「上へ上へと続く列」が集合の中に上界をもたないことが原因である．逆に，それさえ防げば極大元がある，というのがツォルンの補題である．

定義 1　鎖・帰納的順序集合

順序集合 $(A, \leq)$ について，

(1) A の部分集合 C で，$\leq$ が C の上で全順序になっている（C のどの 2 つの要素も比較可能な）ものを A の**鎖**（または全順序部分集合）という．

(2) $A \neq \varnothing$ で，A の**どの鎖も A の中に上界をもつ**とき，A は**帰納的**であるという．

空集合も鎖であり，その上界は「A の任意の要素」なので，空集合の鎖の上界があることは $A \neq \varnothing$ と同じことである．本によっては「空でない鎖」だけを考え，$A \neq \varnothing$ を別に仮定している．

定理 1　ツォルンの補題

帰納的な順序集合には，極大元が存在する．

「補題」という名前だが，この主張は第 3 章までに使ってきた考え方からは証明できず，No.3 で扱う**選択公理**と同値である．このシリーズでは，ツォルンの補題を「認めて使う道具」として扱い，選択公理から導く証明は省略する（教科書に任せる．No.3 で考え方を紹介する）．

例 1

(1) $([0,1], \leq)$ は帰納的である（どの鎖も上界 1 をもつ）．極大元は 1．

(2) $([0,1), \leq)$ は帰納的でない．鎖 $[0,1)$ 自身が $[0,1)$ の中に上界をもたない．

(3) 集合 X に対して，$(\mathcal{P}(X), \subset)$ は帰納的である．鎖 $\mathcal{C}$ に対して，和集合 $\bigcup_{S\in\mathcal{C}} S$ が上界になる．極大元は X．

例 1 (3) の「鎖の和集合が上界になる」は，ツォルンの補題を使うときのいちばん典型的な形である．

■ 2. ベクトル空間の基底の存在

分野「線形代数」では，有限次元のベクトル空間を中心に考えた．ここでは，無限次元の場合も含めて「どんなベクトル空間にも基底がある」ことを示す．K を $\mathbb{R}$，$\mathbb{C}$，$\mathbb{Q}$ などとし，K 上のベクトル空間 V を考える．

定義 2　無限集合の 1 次独立と基底

$S \subset V$（無限集合でもよい）について，

(1) S の**有限個の**要素の 1 次結合全体を $\langle S \rangle$ と書く（$\langle \varnothing \rangle = \{\boldsymbol{0}\}$）．

(2) S の**どの有限部分集合も 1 次独立**であるとき，S は **1 次独立**であるという．

(3) S が 1 次独立で，$\langle S \rangle = V$ のとき，S を V の**基底**という．

無限個のベクトルの「和」は（収束を考えないと）意味をもたないので，1 次結合はいつも有限個で考える．S が有限集合なら，分野「線形代数」第 4 章 No.2・No.3 の定義と一致する．

例 2

実数の数列全体のベクトル空間 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ の中で，第 n 項だけが 1 で他が 0 の数列を $\boldsymbol{e}_n$ とする．$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots\}$ は 1 次独立だが，$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ の基底ではない．$\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots \rangle$ は「有限個の項以外は 0」の数列全体であり，$(1, 1, 1, \dots)$ を含まないからである．

定理 2

$S \subset V$ が 1 次独立で，$\boldsymbol{v} \in V$ が $\boldsymbol{v} \notin \langle S \rangle$ ならば，$S \cup \{\boldsymbol{v}\}$ も 1 次独立である．

【証明】 $S \cup \{\boldsymbol{v}\}$ の有限部分集合の 1 次関係 $c\boldsymbol{v} + c_1\boldsymbol{s}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{s}_k = \boldsymbol{0}$（$\boldsymbol{s}_i \in S$ は相異なる）を考える．$c \neq 0$ なら $\boldsymbol{v} = -\frac{1}{c}(c_1\boldsymbol{s}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{s}_k) \in \langle S \rangle$ となり矛盾．よって $c = 0$ で，S の 1 次独立性より $c_1 = \cdots = c_k = 0$． □

定理 3　基底の存在

どんなベクトル空間 V にも基底が存在する．

【証明】 V の 1 次独立な部分集合全体を $\mathcal{A}$ とし，包含関係 $\subset$ で順序集合と考える．

$\mathcal{A} \neq \varnothing$：$\varnothing$ は 1 次独立（有限部分集合は $\varnothing$ だけで，1 次関係がない）なので $\varnothing \in \mathcal{A}$．

鎖が上界をもつ：$\mathcal{C}$ を $\mathcal{A}$ の空でない鎖とし，$U = \bigcup_{S\in\mathcal{C}} S$ とおく．U が 1 次独立であることを示す．U の有限部分集合 $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k\}$ をとると，各 $\boldsymbol{u}_i$ はある $S_i \in \mathcal{C}$ に属する．$\mathcal{C}$ は鎖なので，$S_1, \dots, S_k$ は $\subset$ で一列に並び，その中に最大のもの S_j がある．すべての $\boldsymbol{u}_i$ は S_j に属し，S_j は 1 次独立なので，$\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k\}$ は 1 次独立．よって $U \in \mathcal{A}$ で，U は $\mathcal{C}$ の上界である．（空の鎖の上界は $\varnothing$ でよい．）

ゆえに $\mathcal{A}$ は帰納的で，ツォルンの補題より極大元 B がある．

B **は基底**：B は 1 次独立．もし $\langle B\rangle \neq V$ なら，$\boldsymbol{v} \notin \langle B\rangle$ をとると，定理 2 より $B \cup \{\boldsymbol{v}\}$ も 1 次独立で，$B \subsetneq B \cup \{\boldsymbol{v}\}$ となり B の極大性に反する．よって $\langle B\rangle = V$．　□

例 3

$\mathbb{R}$ を $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間と考える（スカラー倍は有理数倍だけ）．定理 3 より，$\mathbb{Q}$ 上の基底 B がある．これを**ハメル基底**という．すべての実数が「B の有限個の要素の有理数係数の 1 次結合」としてただ 1 通りに書ける．しかし，B を具体的に書き下した人はいない．ツォルンの補題は「存在する」ことだけを教えてくれるのである．

■ 3. ツォルンの補題の使い方

定理 3 の証明は，次の「型」に従っている．

ツォルンの補題を使う証明の型

(1)「途中まで作ったもの」全体を集合 $\mathcal{A}$ とし，「延長」の関係で順序を入れる．（定理 3 では，1 次独立な集合を $\subset$ で．）

(2) $\mathcal{A} \neq \varnothing$ を確かめる．（たいてい「何もない状態」$\varnothing$ が入る．）

(3) 鎖の上界を作る．（たいてい鎖の要素の**和集合**．それが $\mathcal{A}$ に入ることを確かめるのが証明の山場．）

(4) ツォルンの補題で極大元をとり，「もし完成していなければ，もう 1 歩延長できて極大性に矛盾」と示す．

例題 1

全射 $f\colon A \to B$ には右逆写像（$f \circ h = \mathrm{id}_B$ となる $h\colon B \to A$）が存在することを，ツォルンの補題を使って示せ．

【解答】 (1) $D \subset B$ と写像 $h\colon D \to A$ の組 (D, h) で，すべての $b \in D$ について $f(h(b)) = b$ をみたすもの全体を $\mathcal{A}$ とする．$(D, h) \leq (D', h')$ を「$D \subset D'$ かつ $h'|_D = h$」（h' は h の延長）と定めると，半順序になる．

(2) 空集合からの写像 $h_\varnothing\colon \varnothing \to A$ を考えれば $(\varnothing, h_\varnothing) \in \mathcal{A}$.

(3) 空でない鎖 $\mathcal{C}$ に対して，$D^* = \bigcup_{(D,h)\in\mathcal{C}} D$ とし，$b \in D^*$ に対して $b \in D$ となる $(D, h) \in \mathcal{C}$ をとって $h^*(b) = h(b)$ と定める．別の $(D', h') \in \mathcal{C}$ で $b \in D'$ でも，鎖なので一方が他方の延長であり，$h(b) = h'(b)$．よって h^* は写像として定まり，$(D^*, h^*) \in \mathcal{A}$ は $\mathcal{C}$ の上界である．

(4) ツォルンの補題より極大元 (D, h) がある．$D \neq B$ なら，$b_0 \in B \setminus D$ をとり，f は全射なので $f(a_0) = b_0$ となる a_0 を 1 つとる．h を $D \cup \{b_0\}$ に $h(b_0) = a_0$ と延長すると $\mathcal{A}$ の要素になり，極大性に反する．よって $D = B$ で，h が右逆写像である．

第 2 章 No.3 定理 5 (2) では「各 b について，いっせいに 1 つずつ選ぶ」ことで右逆写像を作った．例題 1 では，(4) で選ぶのは **1 つだけ**である．「無限回の選択」はツォルンの補題が肩代わりしているのである．

例 4　ほかの分野での使い方

同じ型で，次のようなことが示される．

- 環の（自分自身でない）イデアルは，極大イデアルに含まれる（分野「代数学」第 5 章 No.2 のイデアルを参照）．
- ハーン・バナッハの定理（線形汎関数の延長，分野「解析学」第 10 章）．
- 位相空間論のチコノフの定理（コンパクト空間の直積はコンパクト．コンパクト性は分野「位相空間論」第 3 章）．

■ 4. ツォルンの補題がいらない場合

有限の場合はもちろん，「1 つずつ順番に」処理できる場合もツォルンの補題はいらない．たとえば V が**可算個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots$ で張られる**なら，「$\boldsymbol{v}_n$ がそれまでに選んだベクトルの 1 次結合で書けなければ加える」を $n = 1, 2, \ldots$ と順に行えば，基底が得られる（$\mathbb{N}$ の整列性と帰納法で済む）．ツォルンの補題が本当に必要になるのは，$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ や「$\mathbb{Q}$ 上の $\mathbb{R}$」のように，**番号をつけて順に処理することができないほど大きい**場合である．

コラム：ハメル基底と「おかしな関数」

すべての実数 x，y で $f(x+y) = f(x) + f(y)$ をみたす関数を**加法的関数**という．$f(x) = cx$ は加法的である．f が連続なら，加法的関数はこれしかないことが知られている．ところがハメル基底を使うと，$f(x) = cx$ の形でない（したがって連続でない）加法的関数が作れる（練習問題 6）．そのグラフは座標平面のどこにでもぎっしり点がある，とても「おかしな」ものになる．ツォルンの補題（選択公理）は，こうした直観に反する対象の存在も保証してしまう．No.3 でさらに例を見る．

■ 練習問題

発展 のついた問題は，この回の内容から一歩踏み出した発展問題である．最初は飛ばして，ほかの問題が解けてから挑戦するとよい．

1. 次の順序集合は帰納的か．また，極大元をすべて求めよ．

(1) $(\mathcal{P}(X) \setminus \{X\}, \subset)$，ただし $X = \{1, 2, 3\}$

(2) $\mathbb{N}$ の有限部分集合全体を $\subset$ で順序づけたもの

(3) $(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\mathbb{N}\}, \subset)$

2. ベクトル空間 V の 1 次独立な部分集合 S は，V のある基底に含まれることを，ツォルンの補題を使って示せ．

3. 空でない有限の順序集合には極大元があることを，ツォルンの補題を使わずに示せ．

4. $(A, \leq)$ が帰納的ならば，任意の $a \in A$ に対して，$a \leq m$ となる極大元 m があることを示せ．

5.（考えてみよう）$\mathbb{R}$ を $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間と考えたときの基底（ハメル基底）B は，非可算集合であることを示せ．

6. 発展（考えてみよう）ハメル基底 B を 1 つとり，$b_0 \in B$ を固定する．実数 x を $x = q_0 b_0 + q_1 b_1 + \cdots + q_k b_k$（$q_i \in \mathbb{Q}$，$b_1, \ldots, b_k \in B \setminus \{b_0\}$ は相異なる）と表したときの q_0 を $f(x)$ とする．f は加法的関数（$f(x+y) = f(x) + f(y)$）であるが，$f(x) = cx$ の形ではないことを示せ．

■ 練習問題の解答

1. (1) 帰納的．有限集合なので，どの鎖も有限で，その最大の要素が上界になる（空の鎖には $\varnothing$）．極大元は $\{1, 2\}$，$\{1, 3\}$，$\{2, 3\}$ の 3 つ．
(2) 帰納的でない．鎖 $\{1\} \subset \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\} \subset \cdots$ の上界は $\{1, 2, \ldots, n\}$ をすべて含むので無限集合になり，この順序集合の中にない．極大元もない（有限集合 S には $S \cup \{\max S + 1\}$ が真に大きい；$S = \varnothing$ なら $\{1\}$）．
(3) 帰納的でない．(2) と同じ鎖の上界は $\mathbb{N}$ を含まねばならないが，$\mathbb{N}$ は除かれている．しかし極大元はある．$\mathbb{N} \setminus \{n\}$（$n \in \mathbb{N}$）がそれである．**帰納的であることは極大元が存在するための十分条件であって，必要条件ではない**ことが分かる．

2. 1 次独立で S を含む部分集合全体を $\mathcal{A}$ とし，$\subset$ で順序づける．$S \in \mathcal{A}$ なので空でない．鎖の和集合は，定理 3 の証明と同じく 1 次独立で，S を含むので $\mathcal{A}$ に属し，上界になる（空の鎖の上界は S）．ツォルンの補題より極大元 B があり，定理 3 の証明と同じく $\langle B \rangle = V$．よって B は S を含む基底．

3. A の要素の個数を n とする．$a_1 \in A$ をとる．a_1 が極大元でなければ $a_1 < a_2$ となる a_2 があり，a_2 が極大元でなければ $a_2 < a_3$ となる a_3 がある．これを続けると $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ となり，推移律と反対称律より a_i はすべて異なる．A には n 個しか要素がないので，この操作は n 回以内に止まり，止まったところの a_k が極大元である．

4. $A_a = \{\, x \in A \mid a \leq x \,\}$ を $\leq$ で順序集合と考える．$a \in A_a$ なので空でない．A_a の空でない鎖 C は A の鎖でもあるので，A の中に上界 u がある．C の要素 c について $a \leq c \leq u$ なので $u \in A_a$．よって A_a は帰納的．ツォルンの補題より A_a に極大元 m がある．$m < y$（$y \in A$）なら $a \leq m < y$ より $y \in A_a$ なので，m の A_a での極大性に反する．よって m は A の極大元で，$a \leq m$．

5. B が高々可算だとすると，B の有限部分集合の有理数係数の 1 次結合全体，すなわち $\langle B \rangle$ は，「B の要素の有限列と有理数の有限列の組」で表されるので高々可算になる（第 3 章 No.1 定理 3 を使う）．しかし $\langle B \rangle = \mathbb{R}$ は非可算なので矛盾（第 3 章 No.2 定理 3）．

6. **加法的**：x，y の表し方に現れる B の要素をあわせて $b_0, b_1, \ldots, b_k$ とし（係数が 0 のものも含めて），$x = \sum q_i b_i$，$y = \sum r_i b_i$ とすると，$x + y = \sum (q_i + r_i) b_i$．表し方はただ 1 通りなので，$f(x + y) = q_0 + r_0 = f(x) + f(y)$．
cx **の形でない**：$f(b_0) = 1$．B は非可算（練習問題 5）なので，$b_1 \in B \setminus \{b_0\}$ がとれて，$f(b_1) = 0$．$f(x) = cx$ とすると，$f(b_0) = 1$ より $c \neq 0$．$b_1 \neq 0$（1 次独立な集合は $\mathbf{0}$ を含まない）なので $f(b_1) = cb_1 \neq 0$ となり矛盾．